

Kombinatorische Optimierung, SS07
Prof. Dr. Ralf Thiele
Lösung zu Übung 2

Hubertus Grommes, Thorsten Roth

17. April 2007

Aufgabe 1:

Gegeben:

- $k_A = 36000$: Kosten Typ A
- $k_B = 52000$: Kosten Typ B
- $l_A = 70000$: Leistung Typ A
- $l_B = 11000$: Leistung Typ B
- 980000: Verfügbares Kapital
- 105 Fahrer insgesamt
⇒ 35 Fahrer pro Schicht
- Maximale Anzahl von Fahrzeugen wegen Beschränkung durch Reparaturwerkstatt: 25
- Typ A kann allein gefahren werden, Typ B nur zu zweit

Das zu formulierende Optimierungsproblem soll eine optimale Fuhrparkzusammenstellung liefern.

- Variablen:
 x_A, x_B : Anzahl angeschaffter Fahrzeuge der Typen A und B
- Constraints:
 - $x_A, x_B \geq 0$: Keine negative Anzahl von Fahrzeugen möglich
 - $x_A k_A + x_B k_B \leq 980000$: Gesamtkosten müssen innerhalb des Finanzierungsrahmens bleiben
 - $x_A + x_B \leq 25$: Maximal 25 Fahrzeuge wegen Reparaturwerkstatt
 - $x_A + 2x_B \leq 35$: Maximal 35 Fahrer pro Schicht werden benötigt (ggf. auch mit Gleichheitsbedingung)
- Optimale Leistung:
 $c(x_A, x_B) = x_A l_A + x_B l_B \rightarrow \max$

Aufgabe 2a:

Zu zeigen ist, dass $CH(S)$ der Durchschnitt aller konvexen Mengen ist, die S umfassen. Formal:

$$CH(S) = \bigcap_{S \subseteq M} M$$

Beweis: Nach Definition 1.9 ist eine Menge M genau dann konvex, wenn $M = CH(M)$ gilt. Die kleinste konvexe Menge, die S enthält, ist genau $CH(S)$. Damit ist $CH(S)$ auch die kleinste für M in Frage kommende Menge. Alle anderen konvexen Mengen, die S enthalten, sind auch echte Obermengen von $CH(S)$. Damit ergibt der Schnitt all dieser Mengen genau die konvexe Hülle $CH(S)$. \square

Aufgabe 2b:

Zu zeigen ist, dass der Schnitt beliebig (endlich) vieler konvexer Mengen ebenfalls konvex ist. Formal:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, n \in \mathbb{N} : S_i \text{ konvex} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n S_i \text{ konvex}$$

Beweis: Wir nehmen an, S sei nicht konvex. Dann gilt:

$$\exists x, y \in S, \lambda \in [0, 1] : z = \lambda x + (1 - \lambda)y \notin S$$

Nach Voraussetzung ist S die Schnittmenge aller S_i . Würden aber alle S_i auch z enthalten, so enthielten sie ebenso die entsprechenden Konvexkombinationen und S wäre damit wieder konvex. Es ergibt sich also ein Widerspruch zur Annahme, S sei nicht konvex. \square

Aufgabe 3:

In einem Graph mit m Knoten entstehen die TSP-Touren durch zyklische Permutation dieser Knoten. Die Anforderung an die $N_k(y)$ -Nachbarschaft ist, dass der betroffene Teil, in welchem die Kanten gelöscht werden, hinsichtlich seines Start- und Endpunktes wieder (unter Verwendung aller Knoten und Teilstücke) verbunden wird. Mögliche Fälle:

1. Es werden k Kanten entfernt, die zu direkt aufeinanderfolgenden Knoten inzident sind. Dann können diese Knoten beliebig permutiert werden und es existieren $(k - 1)!$ Möglichkeiten der Anordnung dieser Knoten.
2. Es werden k Kanten entfernt, deren Inzidenz zu den zugehörigen Knoten paarweise disjunkt ist. Es werden also keine zwei aufeinanderfolgenden Kanten entfernt. Dann entstehen Teilstücke t_1, \dots, t_{k-1} , die jeweils wieder einen Start- und einen

Endknoten haben. Neben den $(k - 1)!$ Permutationen der Teilstücke können nun auch die Start- und Endknoten der Teilstücke pro Permutation der Teilstücke auf 2^{k-1} mögliche Arten zusammengesetzt werden. Damit gibt es $2^{k-1}(k - 1)!$ Möglichkeiten der Anordnung von Kanten.

- Isolierte Knoten können auch mit Teilstücken kombiniert werden. Dabei sei $\#_{iso}$ die Anzahl der isolierten Kanten und $\#_{teil}$ die Anzahl der Teilstücke. Behandelt man nun die Teilstücke, als wären sie isolierte Knoten (womit es pro Teilstück keine Vertauschung der Reihenfolge gäbe), so ergeben sich $(\#_{iso} + \#_{teil})!$ mögliche Permutationen. Nimmt man nun noch die Vertauschung der Start- und Endknoten der Teilstücke hinzu, so kann diese pro Permutation geschehen und man erhält insgesamt $2^{\#_{teil}}(\#_{iso} + \#_{teil})!$ gültige Permutationen.

Es seien κ_i , $i \in \{1, \dots, \binom{n}{k}\}$ die Auswahlmöglichkeiten von k aus n Kanten. Es sei weiterhin $\#_{iso}(\kappa)$ die Anzahl der isolierten Knoten und $\#_{teil}(\kappa)$ die Anzahl der Teilstücke in Auswahl κ . Dann ergibt sich für die gesamte Nachbarschaft über alle Auswahlmöglichkeiten als Größe:

$$\sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} 2^{\#_{teil}(\kappa_i)} (\#_{iso}(\kappa_i) + \#_{teil}(\kappa_i))!$$

Daraus folgt für $k \geq 2$, dass für eine Auswahlmöglichkeit κ die Anzahl der möglichen Kantenanordnungen in $\mathcal{O}(2^{k-1}(k - 1)!) = \mathcal{O}(k!)$ liegt. Damit gilt auch:

$$\binom{n}{k} < |N_k(y)| < \binom{n}{k} 2^{k-1}(k - 1)!$$

Da die Auswahl der Kanten letztlich wegen $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ durch n beschränkt wird, gilt ebenso:

$$|N_k(y)| = \mathcal{O}(n!)$$

Aufgabe 4:

Es sei G der in Abbildung 0.1 zu sehende Graph. Dann kann eine Instanz (F, c) eines Optimierungsproblems zum Finden der zwei minimalen zusammenhängenden Kanten des Graphen mit der Nachbarschaft $N_1(f)$ wie folgt definiert werden:

- Variablen:
 x_1, \dots, x_5 mit $x_i = 1$ für in der Lösung vorhandene und $x_i = 0$ für nicht vorhandene Kanten.
- Constraints:
– $\sum_{i=1}^5 x_i = 2$: Es müssen genau zwei Kanten in der Lösung vorhanden sein.

- $x_i + x_j \leq 1$, $i < j$, $j - i \geq 2$: Es dürfen keine zwei voneinander getrennten Kanten in der Lösung vorhanden sein.
- Kosten: $c(x_1, \dots, x_5) = \sum_{i=1}^5 x_i w_i \rightarrow \min$: Die Kosten ergeben sich aus der Addition der Gewichte der vorhandenen Kanten und sollen minimiert werden.

Es ist also $F \subset \mathbb{R}^5$ und c linear (und damit auch konvex) in \mathbb{R}^5 .

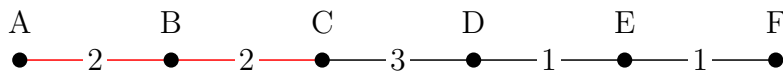


Abbildung 0.1: Der Graph G

Die in der Abbildung markierten Kanten sind in der Lösungsmenge enthalten. Gleichzeitig stellt die Lösung ein lokales Minimum dar, da sie *1-optimal* ist. Mittels einer $N_1(f)$ -Nachbarschaft ist nur eine Änderung mit höheren Kosten möglich, womit das globale Minimum, also die beiden Kanten mit der Länge 1, nach dieser Heuristik nicht gefunden wird.